ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Applications des mathématiques:

Température d'une tasse de café

Mathématiques Appliquées et Génie Industriel

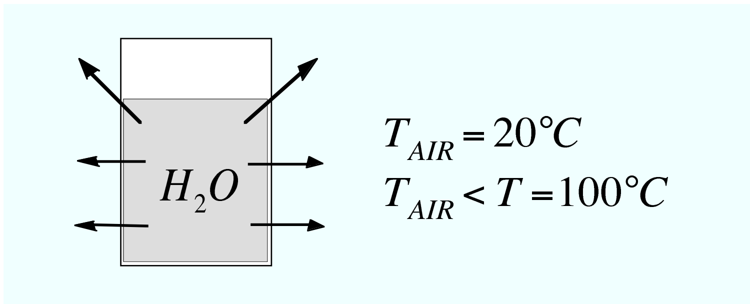
Résumé	Le refroidissement d'une tasse de café chaude est modélisée par une équation différentielle exprimant la loi de Newton. On applique la méthode de séparation des variables pour résoudre l'équation
Domaines du génie	Mécanique, Chimique, Physique
Notions mathématiques	Méthode de séparation des variables
Cours pertinents	Équations Différentielles
Auteur(es)	M. Laforest, A. Saucier, E. Chan-Tave

Sommaire

1 Introduction

Dans cet exemple, veut modéliser la température d'une tasse de café en fonction du temps. Or la loi de Newton pour la diffusion de la chaleur même naturellement se traduit par une équation différentielle.

Le refroidissement d'une tasse de café fraîchement fait, puis maintenu dans une pièce à température constante, est décrit par une équation différentielle du premier ordre.



Soit $\begin{cases} T(t) = \text{ la température de l'eau en fonction du temps } t, \\ T_A = \text{ la température ambiante,} \\ T(0) = 100 = \text{ la température initial du café,} \end{cases}$ On cherche T après 1 heure.

2 Modélisation

La loi de Newton dit que le taux de variation de la température $\frac{dT}{dt}$ d'un objet est proportionnel à la différence entre sa température T et la température ambiante T_0 :

$$\frac{dT}{dt} = \alpha(T - T_0).$$

Dans le cas d'une tasse de café, la constante de proportionnalité est déterminée par des expériences en laboratoire. Si la température initiale en café est $100\,°\mathrm{C}$, alors le problème à valeur initiale pour T est :

$$\frac{dT}{dt} = 0.1(T - 20) \qquad (1)$$
$$T(0) = 100C \qquad (2)$$

3 Résolution

L'équation est à variables séparables. On réduit l'équation 1 :

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T-20} &= -0.1dt \\ \ln|T-20| &= -0.1t + C \\ T - 20 &= Ce^{-0.1t} \\ T(t) &= 20 + Ce^{-0.1t} \end{aligned}$$

Pour trouver C, on pose :

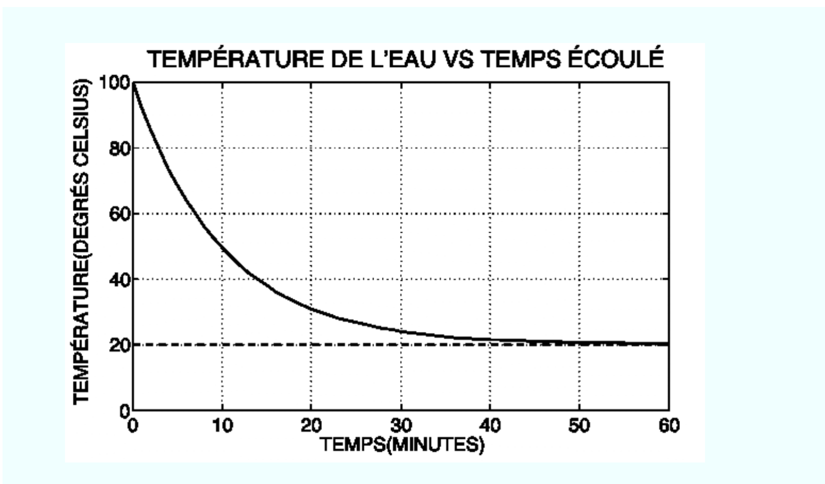
$$\begin{aligned} T(0) &= 100 \\ 20 + Ce^{-0.1*0} &= 100 \\ 20 + C &= 100 \\ C &= 80 \end{aligned}$$

La solution est donc :

$$\boxed{T(t) = 20 + 80e^{-0.1t}}$$

4 Interprétation des résultats

Grâce à cette solution, on peut tracer la courbe de l'évolution de la température de l'eau en fonction du temps tel qu'on peut le voir ci-dessous :



On observe le comportement de la température de l'eau sur une heure. Au départ l'eau est à $100\,^{\circ}\mathrm{C}$, puis elle descend sur celui une courbe exponentielle jusqu'à une valeur minimale de $20\,^{\circ}\mathrm{C}$. Cette température correspond à la température ambiante de l'air autour de la tasse. De plus, dans notre solution nous avions $T(t) = 20 + 80e^{-0.1t}$, si on observe le passage à la limite :

$$\lim_{t\to\infty}(80e^{-0.1t}) = 0$$
$$\lim_{t\to\infty}(20 + 80e^{-0.1t}) = 20$$

On retrouve donc les résultats du graphe. On en déduit ainsi qu'en laissant sa tasse de café à $100\,^{\circ}\mathrm{C}$ sur le comptoir, elle n'est plus qu'à $50\,^{\circ}\mathrm{C}$ en dix minutes et pratiquement à $20\,^{\circ}\mathrm{C}$ en 30 minutes, par contre même en laissant sa tasse beaucoup plus longtemps, la température du café ne descendra pas en dessous de la température ambiante.

5 Conclusion

Dans cet exemple, nous avons utilisé la méthode de séparation de variables pour résoudre l'équation différentielle que nous avions utilisée pour modéliser l'évolution de la température d'une tasse de café au cours du temps. Nous avons trouver une solution, montrant que la température du café au bout d'un certain temps atteindra et restera à la température ambiante.